



Aide mémoire pour le calcul de la matrice radiale au premier ordre par la méthode vectorielle

J. Fermé

► To cite this version:

J. Fermé. Aide mémoire pour le calcul de la matrice radiale au premier ordre par la méthode vectorielle. 1989, pp.1-35. in2p3-00356230

HAL Id: in2p3-00356230

<https://hal.in2p3.fr/in2p3-00356230>

Submitted on 27 Jan 2009

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

GANIL

GRAND ACCELERATEUR NATIONAL D'IONS LOURDS - CAEN
LABORATOIRE COMMUN IN2P3 (CNRS) - IRF (CEA)



AIDE MEMOIRE POUR LE CALCUL DE LA MATRICE
RADIALE AU PREMIER ORDRE PAR METHODE
VECTORIELLE

J. Fermé

GANIL RI 89 07

Commentaires sur l'édition 2009

Cette réédition du rapport "GANIL RI 89 07" diffère des précédentes par l'ajout des pages 5.6 à 5.9 qui exposent dans le détail le calcul des gradients du champ électrique observé au niveau de la particule de référence. En effet, ces calculs n'étaient pas explicités.

D'autre part, il nous apparaît essentiel de rappeler que tous les calculs sont opérés **dans le référentiel du laboratoire (espace absolu) et à un instant donné.**

Les grandeurs que nous qualifions de "relatives" répondent à la définition ci-dessus. Elles peuvent être mesurées au moyen d'un émittance-mètre occupant une position fixe par rapport au laboratoire.

Le champ magnétique et le champ électrique sont ceux observés dans le laboratoire.

Les masses sont affectées du facteur relativiste "gamma".

Le vecteur que nous appelons ici "position relative de la particule voisine de la particule de référence" est défini comme étant la différence des vecteurs des positions absolues de la particule de référence et de la particule voisine. A titre indicatif, la composante de la position relative selon la direction de la tangente à la trajectoire de la particule de référence serait à multiplier par le facteur "gamma" pour un observateur qui serait lié au déplacement de cette particule de référence (ce qui n'est heureusement pas le cas !).

De même, le vecteur "vitesse relative" de la particule voisine de la particule de référence est calculé comme étant la différence des vecteurs des vitesses absolues. Cette vitesse relative ne coïncide pas avec la vitesse relative que pourrait mesurer un observateur se déplaçant avec la particule de référence. Au premier ordre, la composante longitudinale de la vitesse relative mesurée dans le référentiel mobile de la particule de référence est à multiplier par le facteur "gamma au carré" conformément à la théorie de la relativité restreinte.

De même, l'accélération appelée relative est ici égale à la différence des accélérations absolues.

La méthode vectorielle ici présentée convient idéalement au calcul des huit coefficients des équations du mouvement relatif radial (valeurs explicites : voir page 5.2).

Le calcul de ces huit coefficients peut aussi se faire à partir de la différentiation (à un instant donné) des équations du mouvement de la particule de référence, et aboutit évidemment au même résultat que le calcul vectoriel ; mais au prix d'une démarche laborieuse impliquant de regrouper, et cela n'est pas vraiment évident, les très nombreux termes d'un développement pléthorique.

JANVIER 1981

MARS 1989

Avril 2007

—:—:—:—:—:—:—:—:—:

Nous exposons ici une méthode vectorielle, relativement plus simple. Nous complétons également les informations fournies précédemment sur l'élaboration des différentes formes de matrices.

1. Définition du mouvement relatif.
2. Equations du mouvement relatif au premier ordre.
3. Résolution des équations du mouvement relatif par calcul numérique.
Matrice en temps.
4. Formules de conversion de la matrice en temps.
5. Calculs auxiliaires.
6. Formule de Liouville.
7. Système d'unités.
8. Commentaires

- 1) Rapport interne GANIL 75-9 bis. Description des programmes TRAJ 22 et TRAJ 30.
- 2) Rapport interne GANIL 75-25 - Programme TRAJ 30 - Matrice de transfert radiale.

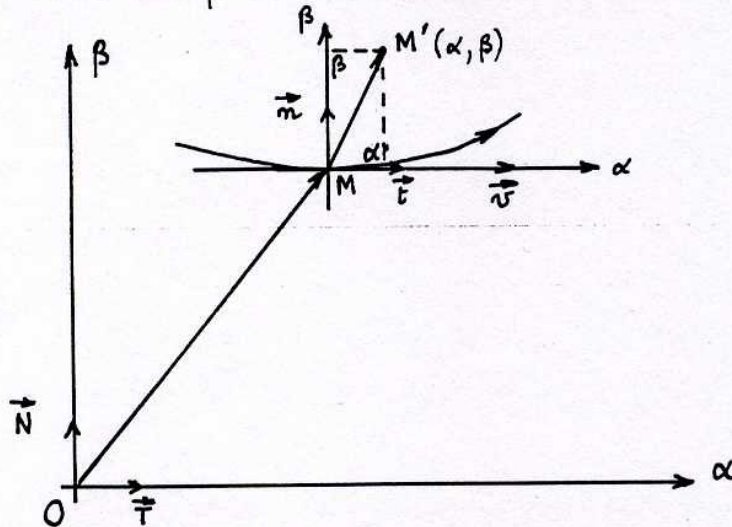
1. Définition du mouvement relatif.

Soit M la position, à un instant donné, du point courant de la trajectoire principale.

Soit $M\alpha\beta$ un système d'axes orthogonaux ainsi définis : l'axe $M\alpha$ est orienté dans le même sens que la tangente en M , l'axe $M\beta$ fait un angle de $+\frac{\pi}{2}$ avec l'axe $M\alpha$.

Soit au même instant le point M' de coordonnées α et β par rapport aux axes mobiles précédemment définis.

Soit enfin un système d'axes orthogonaux $O\alpha\beta$, fixes, et parallèles aux axes $M\alpha\beta$ à l'instant considéré.



Nous comprendrons que le point M tourne autour de son centre instantané de rotation avec la vitesse angulaire ω , comptée positivement si la rotation a lieu dans le sens trigonométrique, et inversement.

Soient \vec{T} et \vec{N} les vecteurs unitaires du système d'axes $O\alpha\beta$, \vec{t} et \vec{n} ceux du système $M\alpha\beta$.

A l'instant considéré, les vecteurs \vec{T} et \vec{t} sont équipollents, de même les vecteurs \vec{N} et \vec{n} . Cependant les vecteurs \vec{t} et \vec{n} sont animés de la rotation ω .

La position du point M' par rapport aux repères absolus $O\alpha\beta$ est définie par l'égalité vectorielle :

$$\vec{OM'} = \vec{OM} + \vec{MM'} \quad (1)$$

d'après nos définitions cette expression peut s'écrire :

$$\vec{OM}' = \vec{OM} + \vec{T} \alpha + \vec{n} \beta \quad (1)$$

Dérivons par rapport au temps t

$$\frac{d\vec{OM}'}{dt} = \frac{d\vec{OM}}{dt} + \vec{n} \omega \alpha - \vec{T} \omega \beta + \vec{T} \dot{\alpha} + \vec{n} \dot{\beta} \quad (2)$$

$$\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} \quad \dot{\beta} = \frac{d\beta}{dt}$$

Le premier membre de l'expression (2) est le vecteur vitesse absolue du point M' .

Les vecteurs \vec{T} et \vec{E} étant équipollents, de même que \vec{N} et \vec{n} , à l'instant considéré, l'expression :

$$\frac{d\vec{OM}}{dt} + \vec{n} \omega \alpha - \vec{T} \omega \beta$$

dans le second membre de (2) représente le vecteur vitesse d'entraînement du point M' , c'est à dire la vitesse absolue qu'aurait le point M' si ses coordonnées relatives α et β ne dépendaient pas du temps. Le vecteur $\frac{d\vec{OM}}{dt}$ est la vitesse absolue du point M .

L'expression :

$$\vec{T} \dot{\alpha} + \vec{n} \dot{\beta}$$

dans le second membre de (2) représente le vecteur vitesse relative du point M' par rapport au point M , dans le plan mobile défini par les axes $M \alpha \beta$.

Dérivons une deuxième fois : nous obtenons en groupant les termes :

$$\frac{d^2\vec{OM}'}{dt^2} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} + \vec{T}(-\alpha\omega^2 - \beta\dot{\omega}) + \vec{n}(\alpha\dot{\omega} - \beta\omega^2) + \vec{T}\ddot{\alpha} + \vec{n}\ddot{\beta} + 2\omega(-\vec{T}\dot{\beta} + \vec{n}\dot{\alpha}) \quad (3)$$

$$\text{avec: } \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} \quad \ddot{\alpha} = \frac{d\dot{\alpha}}{dt} \quad \ddot{\beta} = \frac{d\dot{\beta}}{dt}$$

Nous reconnaissons dans cette expression (3) le théorème de la composition des accélérations.

Le premier membre est le vecteur accélération absolue du point M' .

Les trois premiers termes du 2^e membre s'identifient avec le vecteur accélération d'entraînement du point M' . C'est en effet l'accélération absolue qu'aurait le point M' si ses coordonnées relatives α et β ne dépendaient pas du temps.

Les composantes du vecteur accélération relative sont $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\beta}$.

Enfin le dernier terme de l'expression (3) est égal au double du produit vectoriel du vecteur rotation instantané par le vecteur

vitesse relative.

En résumé, les expressions (1), (2) et (3) définissent le mouvement relatif d'un point M' quelconque dans le plan mobile lié au mouvement du point M .

2. Equations du mouvement relatif au premier ordre.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse où le point M répond à une loi d'accélération connue. Soit :

$$\frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = F(\vec{OM}, \frac{d\vec{OM}}{dt}) \quad F \text{ étant une fonction connue.}$$

Au même instant, l'accélération absolue du point M' est :

$$\frac{d^2 \vec{OM}'}{dt^2} = F(\vec{OM} + \vec{MM}', \frac{d(\vec{OM} + \vec{MM}')}{dt})$$

Ce qui peut encore s'écrire :

$$\frac{d^2 \vec{OM}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \vec{T} \cdot f(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) + \vec{N} \cdot g(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) \quad (4)$$

où α et β sont les projections du vecteur \vec{MM}' et $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$ celles du vecteur $\frac{d\vec{MM}'}{dt}$ dans les repères absolus précédemment définis, et à l'instant considéré. Les fonctions f et g sont connues par hypothèse.

Si nous tenons compte de ce que les vecteurs \vec{T} et \vec{E} d'une part, \vec{N} et \vec{n} d'autre part sont équipollents à l'instant considéré, l'expression (4) peut s'écrire :

$$\frac{d^2 \vec{OM}'}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} + \vec{E} \cdot f(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}) + \vec{n} \cdot g(\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta})$$

Faisons maintenant l'hypothèse que le point M' est très voisin du point M. Les paramètres $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ peuvent être alors considérés comme des infiniment petits. Développé au premier ordre, l'expression précédente permet d'écrire l'expression (3) sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} \cdot \dot{\alpha} = \vec{E} \cdot (A_{11} \alpha + A_{12} \dot{\alpha} + A_{13} \beta + A_{14} \dot{\beta}) \\ \vec{n} \cdot \dot{\beta} = \vec{n} \cdot (A_{31} \alpha + A_{32} \dot{\alpha} + A_{33} \beta + A_{34} \dot{\beta}) \end{cases}$$

où les coefficients A_{ij} ne dépendent que de la loi d'accélération du point M.

Ces équations différentielles, du second ordre et linéaires, définissent le mouvement relatif du point M', voisin du point M, au premier ordre.

Nous allons, dans ce qui suit, expliciter le calcul des coefficients A_{ij} dans le cas du programme TRAJ 30. Pour alléger l'exposé, nous avons reporté le détail de certains calculs au chapitre "Calculs auxiliaires".

Dans le programme TRAJ 30 le mouvement absolu du point M est ainsi défini :

$$\frac{d \vec{m} \vec{v}}{dt} = q \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$$

ou encore : $\vec{m} \vec{v} + m \vec{v} = q \cdot (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E})$

L'accélération absolue de M est donc :

$$\vec{v} = \frac{q}{m} (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}) - \frac{\dot{m}}{m} \cdot \vec{v}$$

Appelons \vec{E}_T et \vec{E}_N les composantes tangentielle et normale du champ électrique. D'après la valeur de m (c.f. calculs auxiliaires) l'expression précédente s'écrit :

$$\vec{v} = \frac{q}{m_0 \gamma} (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}_T + \vec{E}_N) - \frac{q}{m_0 \gamma} \frac{v^2}{c^2} \vec{E}_T$$

ou encore :

$$\vec{v} = \frac{q}{m_0 \gamma} (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}_N) + \frac{q}{m_0 \gamma^3} \vec{E}_T \quad (5)$$

Cette dernière formule nous permet, par différenciation, de calculer la différence des accélérations absolues de M' et de M :

$$\frac{d^2 \vec{OM}'}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \Delta \vec{v} = \frac{q}{m_0} \left(-\frac{\Delta \gamma}{\gamma^2} \right) (\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{E}_N) + \frac{q}{m_0 \gamma} (\Delta \vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{v} \wedge \Delta \vec{B} + \Delta \vec{E}_N) + \frac{q}{m_0} \left(-\frac{3 \Delta \gamma}{\gamma^4} \right) \vec{E}_T + \frac{q}{m_0 \gamma^3} \Delta \vec{E}_T \quad (6)$$

Les valeurs de $\Delta \gamma$, $\Delta \vec{v}$, $\Delta \vec{B}$, $\Delta \vec{E}_N$, $\Delta \vec{E}_T$ sont explicitées au chapitre "calculs auxiliaires", sous la forme de développements limités au premier ordre en α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$.

Les vecteurs \vec{v} , \vec{B} , \vec{E}_N , \vec{E}_T sont relatifs au point M , soit :

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{T} \cdot v + \vec{N} \cdot 0 \\ \vec{B} &\text{ normal au plan } O\alpha\beta \\ \vec{E}_N &= \vec{T} \cdot 0 + \vec{N} \cdot E_\beta \\ \vec{E}_T &= \vec{T} \cdot E_\alpha + \vec{N} \cdot 0 \end{aligned}$$

E_α et E_β désignant les composantes du champ électrique selon les axes $O\alpha$ et $O\beta$.

En définitive, nous avons explicité la formule (6) sous la forme d'un développement limité au premier ordre en α , $\dot{\alpha}$, β , $\dot{\beta}$. Le report de ces résultats dans la formule (3) permet d'obtenir les valeurs explicites des coefficients A_{ij} des équations du mouvement relatif.

Les expressions de ces coefficients se trouvent dans le chapitre "calculs auxiliaires".

Dans le chapitre suivant, nous indiquons les méthodes d'intégration des équations du mouvement relatif.

3. Résolution des équations du mouvement relatif par calcul numérique. Matrice en temps.

Les équations du mouvement relatif au premier ordre :

$$\ddot{\alpha} = A_{11} \alpha + A_{12} \dot{\alpha} + A_{13} \beta + A_{14} \dot{\beta}$$

$$\ddot{\beta} = A_{31} \alpha + A_{32} \dot{\alpha} + A_{33} \beta + A_{34} \dot{\beta}$$

sont linéaires et leurs solutions sont des fonctions linéaires des conditions initiales $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$, ce que nous pouvons écrire sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \alpha_F \\ \dot{\alpha}_F \\ \beta_F \\ \dot{\beta}_F \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} P \end{vmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \dot{\alpha}_0 \\ \beta_0 \\ \dot{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

où les indices F indiquent les valeurs finales de $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$, et où P s'identifie avec le tableau des 4×4 coefficients constituant la matrice de transfert au premier ordre.

Nous conviendrons d'appeler "matrice en temps" la matrice P car elle définit le mouvement relatif en fonction du temps.

L'intégration des équations du mouvement relatif se fait par un calcul numérique pas à pas, synchronisé avec celui de la trajectoire principale.

Le programme TRAJ30 existe sous deux formes équivalentes. Dans la première version, la méthode dite "des dérivées" est utilisée pour l'intégration. Se reporter au rapport interne correspondant.¹ La précision obtenue est du 4^e ordre pour la trajectoire principale, du 3^e ordre pour les coefficients de α et β , du 2^e ordre pour ceux de $\dot{\alpha}$ et $\dot{\beta}$, ce qui est suffisant.

Le programme existe sous une autre version, appelé TRAJ31, dans laquelle la méthode Runge Kutta 4 classique est appliquée à l'intégration des équations du mouvement absolu et du mouvement relatif. La précision obtenue est du 4^e ordre partout. Les coefficients de la matrice P sont obtenus de la manière suivante.

Au début du premier pas de calcul, les valeurs initiales

$\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$ sont prises égales respectivement à :

$$1, 0, 0, 0$$

ce qui donnera après intégration numérique les valeurs finales $\alpha_F, \dot{\alpha}_F, \beta_F, \dot{\beta}_F$ telles que :

$$\alpha_F = P_{11} \quad \dot{\alpha}_F = P_{21} \quad \beta_F = P_{31} \quad \dot{\beta}_F = P_{41}$$

L'intégration des équations de mouvement relatif est recommencée encore 3 fois de suite en prenant successivement comme valeurs initiales de $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$:

$$0, 1, 0, 0$$

$$0, 0, 1, 0$$

$$0, 0, 0, 1$$

Ce qui donne après intégration les autres coefficients de la matrice P soit successivement :

$$P_{12}, P_{22}, P_{32}, P_{42}$$

$$P_{13}, P_{23}, P_{33}, P_{43}$$

$$P_{14}, P_{24}, P_{34}, P_{44}$$

Pour le calcul des pas suivants, l'intégration n'est faite de même quatre fois de suite, en prenant pour conditions initiales les conditions finales du pas précédent, soit plus précisément les valeurs des coefficients de la matrice P .

Il est à noter que cette méthode qui évite de calculer à chaque pas la matrice de transfert propre au pas considéré est plus directe que celle utilisée dans la version TRAJ30 qui exige à chaque pas un produit de matrices et une "remise à zéro" de la matrice individuelle du pas considéré. Cette méthode de calcul direct pourrait être appliquée à la version TRAJ30, le gain en temps de calcul serait faible néanmoins.

En ce qui concerne la rapidité de calcul, la version TRAJ30 est plus rapide par un facteur 1,5.

Dans les deux versions du programme, le champ magnétique principal est donné sous la forme d'un tableau de valeurs discrètes. Or l'intégration des équations de mouvement n'a de sens que dans la mesure où le champ magnétique principal est une fonction

continue $B(p, \theta)$.

Nous avons donc arbitrairement assimilé le champ magnétique principal, au voisinage du point courant M , à un polynôme du deuxième degré $B(p, \theta)$ dont les coefficients sont établis à partir des valeurs du champ aux points de la carte de champ les plus proches de M .

Du fait de la progression du point M , il faut changer les coefficients du polynôme $B(p, \theta)$ quand cela devient nécessaire. Nous avons fait coïncider ce changement avec le début d'un pas de calcul, car il ne faut pas introduire de discontinuité à l'intérieur d'un pas de calcul.

En ce qui concerne la trajectoire principale, le passage d'un pas de calcul au suivant est basé sur le respect de la continuité des vecteurs position et vitesse absolues. Si ce passage coïncide avec un changement du polynôme $B(p, \theta)$, il apparaîtra inévitablement une petite discontinuité, en particulier sur la valeur du rayon de courbure.

Les trajectoires voisines se ressentent aussi de la discontinuité du polynôme $B(p, \theta)$. Cette discontinuité se répercute en particulier directement sur la valeur du module du vecteur rotation instantané $\omega = \frac{q \cdot B}{m}$, donc sur la vitesse d'entraînement. Il s'ensuit que pour assurer la continuité du vecteur vitesse absolue, ce qui est essentiel, il faut apporter à la vitesse relative des trajectoires voisines une correction égale et opposée à la discontinuité de la vitesse d'entraînement.

C'est ce qui est pratiqué dans les deux versions de TRAJ 30. Pour simplifier, la correction est appliquée à chaque pas de calcul, et non pas seulement à chaque changement de polynôme $B(p, \theta)$. Cette correction est d'ailleurs intrinsèquement nulle si le polynôme ne change pas.

Remarquons enfin que la discontinuité du champ magnétique est "géographiquement" limitée, au premier ordre, par une droite arbitraire passant par le point M . Nous avons choisi comme droite la normale en M .

Le chapitre suivant indique comment passer de la matrice en temps à des matrices de forme courante, par une transformation linéaire simple.

4. Formules de conversion de la matrice en temps.

L'intégration par calcul numérique fournit la matrice 4×4 de transfert des grandeurs :

α = projection de l'écart en position sur la tangente.

$\dot{\alpha}$ = projection de la vitesse relative sur la tangente.

β = projection de l'écart en position sur la normale.

$\dot{\beta}$ = projection de la vitesse relative sur la normale.

Cette matrice peut être présentée sous d'autres formes, par une combinaison linéaire de ses coefficients.

4.1 Matrice en $x, x', \Delta\phi, \Delta w/w$

x désigne l'écart en position mesuré le long de la normale. La formule de conversion est évidente

$$x = \beta$$

x' est la pente de la trajectoire par rapport à la tangente

$$x' = \frac{\dot{\beta}}{v}$$

$\Delta\phi$ est l'écart en phase, soit par définition dans TRAJ 30 :

$$\Delta\phi = \text{phase du point M} - \text{phase du point M'}$$

La formule de conversion de $\Delta\phi$ s'établit en remarquant que

$$\Delta\phi = \Omega \cdot \Delta t \quad \Omega = \text{ pulsation HF} \quad \text{et} \quad \Delta t = \frac{\alpha}{v}$$

$$\Delta\phi = \Omega \cdot \frac{\alpha}{v}$$

Dans l'expression $\Delta w/w$, w désigne l'énergie cinétique et non pas l'énergie absolue. Donc, par définition,

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta(m - m_0)c^2}{(m - m_0)c^2}$$

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{\Delta\gamma}{\gamma - 1}$$

en faisant appel aux formules du chapitre "calculs auxiliaires" nous trouvons :

$$\frac{\Delta w}{w} = \frac{1}{v} \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1) \cdot (\dot{\alpha} - \omega \beta)$$

Nous avons donc établi les quatre relations qui vont nous permettre de passer de la matrice "P" en $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$, à la matrice "O" en $x, x', \Delta\phi, \Delta w/w$.

Calculons, par exemple, la valeur finale de l'écart en phase $\Delta\phi$.

Par définition :

$$\begin{cases} \Delta\phi_F = \frac{\Omega}{\nu_F} \alpha_F \quad (\text{en radian}) \\ \alpha_F = P_{11} \alpha_0 + P_{12} \dot{\alpha}_0 + P_{13} \beta_0 + P_{14} \dot{\beta}_0 \end{cases}$$

remplaçons $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$ par leurs valeurs en fonction de $x_0, x'_0, \Delta\phi_0, \Delta W/W_0$:

$$\Delta\phi_F = \frac{\Omega}{\nu_F} \left(P_{11} \frac{\nu_0 \Delta\phi_0}{\Omega} + P_{12} \left(\frac{\Delta W}{W_0} \frac{\nu_0}{\gamma_0(\gamma_0+1)} + x_0 \omega_0 \right) + P_{13} x_0 + P_{14} \nu_0 x'_0 \right)$$

Par identification avec l'expression suivante :

$$\Delta\phi_F = O_{31} x_0 + O_{32} x'_0 + O_{33} \Delta\phi_0 + O_{34} \Delta W/W_0$$

nous trouvons :

$$O_{31} = \frac{\Omega}{\nu_F} (P_{13} + P_{12} \omega_0)$$

$$O_{32} = \frac{\Omega}{\nu_F} \nu_0 P_{14}$$

$$O_{33} = \frac{\nu_0}{\nu_F} P_{11}$$

$$O_{34} = \frac{\Omega}{\nu_F} \frac{\nu_0}{\gamma_0(\gamma_0+1)} P_{12}$$

Les autres coefficients de la matrice O se calculent de même, se référer au sous-programme "MAT" du programme TRAJ30.

4.2 Matrice en $x, x', \Delta l, \Delta p/p$

Δl désigne la projection sur la tangente de l'écart en position du point M' par rapport au point M .

La formule de conversion est donc :

$$\Delta l = \alpha$$

p désigne la quantité de mouvement

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta v}{v}$$

$$\frac{\Delta p}{p} = \frac{\Delta \gamma}{\gamma} + \frac{\Delta v}{v}$$

A l'aide des "calculs auxiliaires" nous trouvons la formule de conversion :

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{Y^2}{v} \cdot (\dot{\alpha} - \beta \omega)$$

Calculons, à titre d'exemple, les quatre coefficients de la ligne en $\frac{\Delta r}{r}$.

Par définition:

$$\begin{cases} \frac{\Delta r}{r_F} = \frac{Y_F^2}{v_F} (\dot{\alpha}_F - \beta_F \omega_F) \\ \dot{\alpha}_F = P_{21} \alpha_0 + P_{22} \dot{\alpha}_0 + P_{23} \beta_0 + P_{24} \dot{\beta}_0 \\ \beta_F = P_{31} \alpha_0 + P_{32} \dot{\alpha}_0 + P_{33} \beta_0 + P_{34} \dot{\beta}_0 \end{cases}$$

Nous remplacerons, dans les expressions précédentes, $\alpha_0, \dot{\alpha}_0, \beta_0, \dot{\beta}_0$ par leurs valeurs en fonction de $x_0, x'_0, \Delta l_0, \Delta r/r_0$ et nous identifierons la première des trois expressions avec la suivante:

$$\frac{\Delta r}{r_F} = O_{41} x_0 + O_{42} x'_0 + O_{43} \Delta l_0 + O_{44} \Delta r/r_0$$

Ce qui nous donnera les valeurs des coefficients O_{41} à O_{44} .
Se référer au sous programme "MAT" pour les valeurs des coefficients.

4.3 Sous programme "MAT"

Ce sous programme calcule à chaque "sortie", et sur demande, la matrice en $x, x', \Delta \phi, \Delta w/w$.

La matrice en $x, x', \Delta l, \Delta r/r$ n'est calculée que pour la fin de la trajectoire.

Notons que les matrices de conversion ne sont calculées qu'à l'occasion des "sorties" et qu'elles n'entraînent par conséquent aucune augmentation appréciable du temps de calcul.

5 Calculs auxiliaires

Calcul de $\dot{m} = \frac{dm}{dt}$

La variation de l'énergie cinétique d'une particule de masse m en fonction du temps est égale à sa variation d'énergie absolue

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = \dot{m}c^2$$

La variation d'énergie cinétique en fonction du temps est aussi égale à la puissance développée par l'action du champ électrique \vec{E} .

$$\frac{d(mc^2)}{dt} = q \cdot \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Ce qui donne:

$$\dot{m} = \frac{q}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{E}$$

Si nous appelons \vec{E}_T la composante tangentielle du champ électrique et $|\vec{E}_T|$ son module:

$$\dot{m} = \frac{q}{c^2} \cdot v \cdot |\vec{E}_T| \quad \text{et} \quad \dot{m} \vec{v} = \frac{q}{c^2} \cdot v^2 \cdot \vec{E}_T$$

Calcul de la différence des vitesses absolues entre M' et M , soit $\vec{\Delta v}$

\vec{v} désigne le vecteur vitesse du point M

$\vec{v} + \vec{\Delta v}$ " " " " " " " M'

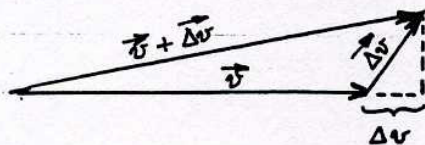
l'expression (2), chapitre 1, nous permet de calculer les projections du vecteur $\vec{\Delta v}$ sur les axes absolus.

$$\vec{\Delta v} = \frac{d\vec{OM}'}{dt} - \frac{d\vec{OM}}{dt} = \vec{T} \cdot (\dot{\alpha} - \omega\beta) + \vec{N} \cdot (\dot{\beta} + \omega\alpha)$$

Calcul du module du vecteur $\vec{v} + \vec{\Delta v}$

Au premier ordre: $|\vec{v} + \vec{\Delta v}| = v + \dot{\alpha} - \omega\beta$

Nous appellerons Δv la grandeur $\dot{\alpha} - \omega\beta$, qu'il ne faut pas confondre avec le module du vecteur $\vec{\Delta v}$

Calcul de la variation du coefficient γ entre M' et M

$$\gamma \equiv \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

en différenciant.

$$\frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{v \cdot \Delta v}{c^2} \gamma^2 \quad \text{ou encore:} \quad \frac{\Delta\gamma}{\gamma} = \frac{\gamma^2 v}{c^2} (\dot{\alpha} - \omega\beta)$$

Calcul de la différence $\vec{\Delta E}_n$ des composantes normales du vecteur champ électrique en M et en M'.

Les projections du vecteur champ électrique selon la normale en M d'une part, et selon la normale en M' diffèrent entre elles :

- du fait de l'existence d'un gradient de champ électrique
- du fait que la normale en M' fait un angle avec la normale en M, égal au premier ordre à : $\frac{\dot{\beta} + \omega \alpha}{v}$.

Appelons E_α et E_β les modules des composantes du champ électrique en M selon les axes absolus $O\alpha\beta$. D'après ce qui précède, le vecteur $\vec{\Delta E}_n$ est égal au premier ordre à :

$$\vec{\Delta E}_n = \vec{N} \cdot \left(\alpha \frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial E_\beta}{\partial \beta} \right) - \vec{T} \cdot \frac{\dot{\beta} + \omega \alpha}{v} \cdot E_\beta - \vec{N} \cdot \frac{\dot{\beta} + \omega \alpha}{v} \cdot E_\alpha$$

Calcul de la différence $\vec{\Delta E}_t$ des composantes tangentielles du vecteur champ électrique en M et en M'.

De la même façon, et au premier ordre :

$$\vec{\Delta E}_t = \vec{T} \cdot \left(\alpha \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} \right) + \vec{N} \cdot \frac{\dot{\beta} + \omega \alpha}{v} \cdot E_\alpha + \vec{T} \cdot \frac{\dot{\beta} + \omega \alpha}{v} \cdot E_\beta$$

Calcul de la différence $\vec{\Delta B}$ des champs magnétiques en M et en M'.

Si \vec{P} désigne le vecteur unitaire $\vec{T} \wedge \vec{N}$:

$$\vec{\Delta B} = \vec{P} \cdot \left(\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \beta \frac{\partial B}{\partial \beta} \right)$$

Coefficients A_{ij} des équations du mouvement relatif.

$$A_{11} = \frac{q}{m} \cdot \left[\omega B + \omega \cdot \frac{E_\beta}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} \right] + \omega^2$$

$$A_{12} = \frac{q}{m} \cdot 3 \cdot \frac{E_\alpha}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right]$$

$$A_{13} = \frac{q}{m} \cdot \left[-3 \cdot \omega \cdot \frac{E_\alpha}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] + \frac{1}{\gamma^2} \frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} \right] + \dot{\omega}$$

$$A_{14} = \frac{q}{m} \cdot \left[B + \frac{E_\beta}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] \right] + 2\omega$$

$$A_{31} = \frac{q}{m} \cdot \left[-v \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha} + \omega \cdot \frac{E_\alpha}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right] \right] - \dot{\omega}$$

$$A_{32} = \frac{q}{m} \cdot \left[B \cdot (\gamma^2 - 2) - \frac{E_\beta}{v} (\gamma^2 - 1) \right] - 2\omega$$

$$A_{33} = \frac{q}{m} \cdot \left[\omega \cdot B \cdot (2 - \gamma^2) - v \frac{\partial B}{\partial \beta} + \frac{\partial E_\beta}{\partial \beta} + (\gamma^2 - 1) \cdot \omega \cdot \frac{E_\beta}{v} \right] + \omega^2$$

$$A_{34} = \frac{q}{m} \cdot \frac{E_\alpha}{v} \cdot \left[\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right]$$

Calcul des termes entrant dans la composition des coefficients A_{ij} .

La plupart de ces termes peuvent se ramener à des projections de vecteurs sur la tangente ou sur la normale, c'est à dire à des produits scalaires.

Nous donnons leurs expressions en coordonnées polaires, et, pour mémoire, en coordonnées cartésiennes.

- Calcul de ω et de $\dot{\omega}$ en M.

Dans TRAJ30 se trouvent les expressions explicites des composantes g_p et g_θ du vecteur accélération absolue, et des composantes \dot{g}_p et \dot{g}_θ du vecteur dérivé du précédent. Ces expressions permettent à leur tour de connaître les valeurs explicites des expressions suivantes, en coordonnées polaires et, pour information, en coordonnées cartésiennes.

	Coordonnées cartésiennes	Coordonnées polaires
accélération tangentielle :	$(\ddot{x}\ddot{y} + \dot{y}\ddot{y}) \cdot \frac{1}{v}$	$(\dot{g}_p + p\dot{g}_\theta) \cdot \frac{1}{v}$
accélération normale $\frac{v^2}{R}$:	$(-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}) \cdot \frac{1}{v}$	$(-p\dot{g}_p + \dot{g}_\theta) \cdot \frac{1}{v}$
rotation instantanée $\omega = \frac{v}{R}$:	$(-\dot{y}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{y}) \cdot \frac{1}{v^2}$	$(-p\dot{g}_p + \dot{g}_\theta) \cdot \frac{1}{v^2}$
$\dot{\omega} = \frac{dv}{dt}$:	$(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) \cdot \frac{1}{v^2} - 2 \cdot \frac{v}{R} (\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}) \cdot \frac{1}{v^2}$	$(\dot{g}_\theta - p\dot{g}_p) \cdot \frac{1}{v^2} - 2 \cdot \frac{v}{R} (\dot{g}_p + p\dot{g}_\theta) \cdot \frac{1}{v^2}$

- Calcul des composantes du champ électrique en M.

Composante normale E_β $(-\dot{y}E_z + \dot{x}E_y) \cdot \frac{1}{v}$ $(-p\dot{E}_p + \dot{E}_\theta) \cdot \frac{1}{v}$

Composante tangentielle E_α $(\dot{x}E_z + \dot{y}E_y) \cdot \frac{1}{v}$ $(\dot{E}_p + p\dot{E}_\theta) \cdot \frac{1}{v}$

- Calcul des gradients de champ électrique.

Il s'agit ici du calcul des quantités $\frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha}$, les deux autres quantités $\frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta}$ et $\frac{\partial E_\beta}{\partial \beta}$ pouvant s'en déduire par le rotationnel et par le divergent. Pour le rotationnel : $\frac{\partial E_\alpha}{\partial \beta} = \frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha}$ [B n'est pas fonction du temps]. Pour le divergent : $\frac{\partial E_\beta}{\partial \beta} = -\frac{\partial E_z}{\partial z} - \frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha}$ avec $\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\partial E_p}{\partial p} - \frac{\partial E_\theta}{p\partial \theta} - \frac{E_p}{p}$.

Calculons d'abord la variation ds. $\frac{\partial \vec{E}}{\partial s}$ du vecteur champ électrique \vec{E} à l'instant considéré, pour un déplacement infinitésimal "ds" le long de la tangente, en limitant le calcul au 1^{er} ordre. Appelons \vec{x} et \vec{y} les vecteurs unitaires des axes en coordonnées cartésiennes, \vec{R} et $\vec{\theta}$ les vecteurs unitaires en M en coordonnées polaires.

En coordonnées cartésiennes, le vecteur $ds \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial s}$ a pour composantes :

$$ds \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} \begin{cases} \vec{X} \cdot \left[dx \cdot \frac{\partial E_x}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \\ \vec{Y} \cdot \left[dx \cdot \frac{\partial E_y}{\partial x} + dy \cdot \frac{\partial E_y}{\partial y} \right] \end{cases}$$

E_x et E_y étant les modules des composantes du vecteur \vec{E} en M.

En coordonnées polaires :

$$ds \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} \begin{cases} \vec{R} \cdot \left[dp \cdot \frac{\partial E_p}{\partial p} + p \cdot d\theta \cdot \frac{\partial E_p}{p \partial \theta} \right] - \vec{R} \cdot E_\theta \cdot d\theta \\ \vec{\Theta} \cdot \left[dp \cdot \frac{\partial E_\theta}{\partial p} + p \cdot d\theta \cdot \frac{\partial E_\theta}{p \partial \theta} \right] + \vec{\Theta} \cdot E_p \cdot d\theta \end{cases}$$

E_p et E_θ étant les modules des composantes du vecteur \vec{E} en M.

Le vecteur unitaire de la tangente \vec{U}_T a pour composantes :

$$\vec{U}_T \begin{cases} \vec{X} \cdot \frac{dx}{ds} \\ \vec{Y} \cdot \frac{dy}{ds} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{R} \cdot \frac{dp}{ds} \\ \vec{\Theta} \cdot \frac{p \cdot d\theta}{ds} \end{cases}$$

Le vecteur unitaire de la normale \vec{U}_N a pour composantes :

$$\vec{U}_N \begin{cases} \vec{X} \cdot \left(-\frac{dy}{ds} \right) \\ \vec{Y} \cdot \frac{dx}{ds} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \vec{R} \cdot \left(-\frac{p \cdot d\theta}{ds} \right) \\ \vec{\Theta} \cdot \frac{dp}{ds} \end{cases}$$

Finalement,

$$\frac{\partial E_\alpha}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial E_\alpha}{\partial s} = \text{produit scalaire} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} \cdot \vec{U}_T$$

et

$$\frac{\partial E_\beta}{\partial \alpha} \equiv \frac{\partial E_\beta}{\partial s} = \text{produit scalaire} \quad \frac{\partial \vec{E}}{\partial s} \cdot \vec{U}_N$$

- Calcul des gradients du champ magnétique.

Gradient tangentiel $\frac{\partial B}{\partial \alpha}$:

$$\left(\hat{x} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + \hat{y} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \right) \frac{1}{v}$$

$$\left(\hat{p} \cdot \frac{\partial B}{\partial p} + \hat{\theta} \cdot \frac{\partial B}{p \partial \theta} \right) \frac{1}{v}$$

gradient normal $\frac{\partial B}{\partial \beta}$

$$\left(-\hat{y} \cdot \frac{\partial B}{\partial x} + \hat{x} \cdot \frac{\partial B}{\partial y} \right) \frac{1}{v}$$

$$\left(-\hat{\theta} \cdot \frac{\partial B}{\partial p} + \hat{p} \cdot \frac{\partial B}{p \partial \theta} \right) \cdot \frac{1}{v}$$

- Variantes dans les expressions des coefficients A_{ij} .

Les coefficients A_{ij} peuvent être écrits sous des formes équivalentes, au gré des utilisateurs, en utilisant des substitutions telles que :

$$\omega = \frac{v}{R} = \frac{q}{m} \left[-B + \frac{E_\beta}{v} \right]$$

$$-\frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2} - 1 \quad \text{etc ...}$$

Expression des coefficients A_{ij} dans le cas d'un champ magnétique statique.

Nous noterons que dans ce cas :

$$\omega = -\frac{q}{m} B \quad \dot{\omega} = -\frac{q}{m} v \frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

En partant des coefficients A_{ij} de la page 5.2 nous trouvons :

$$A_{11} = 0 \quad A_{12} = 0 \quad A_{13} = \dot{\omega} \quad A_{14} = \omega \quad A_{31} = 0 \quad A_{32} = -\omega \cdot \gamma^2 \quad A_{33} = (\gamma^2 - 1) \cdot \omega^2 - \frac{q}{m} v \frac{\partial B}{\partial \beta} \quad A_{34} = 0$$

Commentaires sur le calcul des gradients de champ électrique, page 5.4.

Cet additif donne le détail des calculs relatifs au formalisme, figurant en page 5.4, concernant les gradients de champ électrique *en coordonnées polaires cylindriques*.

Il faut au préalable se rappeler que les paramètres de l'ensemble des termes matriciels sont calculés à l'instant "t". Aucune action de dérivation par rapport au temps ne doit intervenir pendant le déroulement du calcul de ces paramètres. En d'autres termes, le temps est figé. De ce fait, incidemment, les calculs s'appliquent aussi au cas d'un champ électrique variable en fonction du temps.

Le but du calcul est la détermination des composantes du champ et de son gradient au point de référence M, point origine du dièdre $M\alpha\beta$.

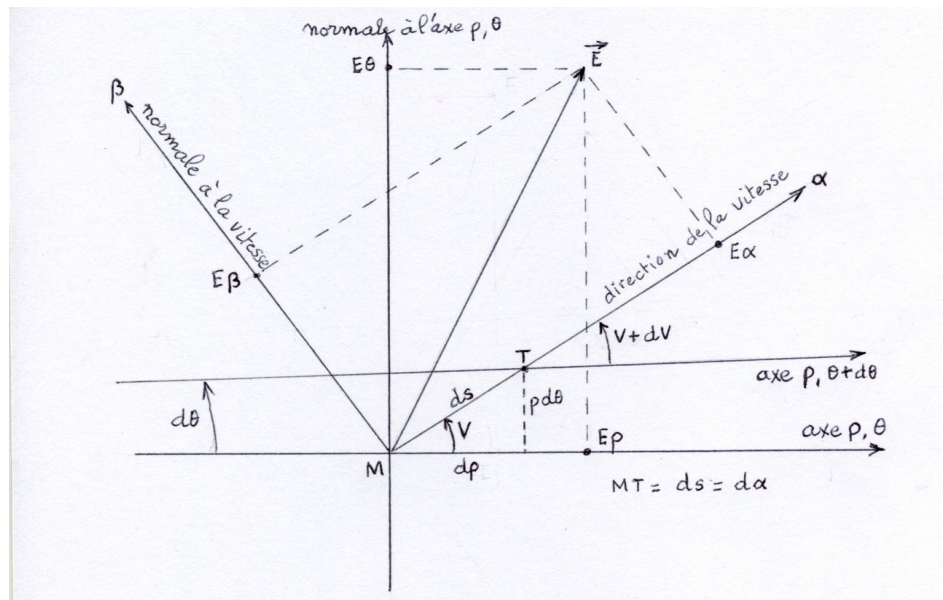
Les modules des composantes du champ électrique dans l'espace cartésien $M\alpha\beta$ sont :

$$E\alpha = (dp/ds)*E\rho + (\rho*d\theta/ds)*E\theta \quad E\beta = (-\rho*d\theta/ds)*E\rho + (dp/ds)*E\theta$$

Les gradients correspondants, " $\delta E\alpha/\delta\alpha$ " et " $\delta E\beta/\delta\alpha$ ", entrent directement, eux aussi, dans la définition des coefficients matriciels figurant page 5.2. Ces deux gradients sont évalués au point M et dans la direction de la tangente $M\alpha$. Le divergent et le rotationnel permettent ensuite, par déduction, de calculer les deux autres gradients, " $\delta E\alpha/\delta\beta$ " et " $\delta E\beta/\delta\beta$ ", lesquels sont évalués au point M et dans la direction de la normale en M, c'est-à-dire dans la direction de l'axe $M\beta$.

Calcul de la dérivation de " $E\alpha$ " et " $E\beta$ " dans la direction de la tangente, c'est-à-dire selon l'axe $M\alpha$.

Se référer à la figure qui suit.



Portons sur l'axe $M\alpha$ le vecteur MT de module " ds ". Rappel : $ds^2 = dp^2 + (\rho*d\theta)^2$

Par " $d\alpha$ " nous désignerons le module du vecteur ainsi défini :

vecteur $d\alpha = ds * \text{vecteur unitaire de la tangente}$

Autrement dit, le module " $d\alpha$ " a pour longueur " ds "

La composante du vecteur unitaire de la tangente sur le rayon vecteur a pour module : " dp/ds ".

La composante de ce vecteur unitaire sur l'axe normal au rayon vecteur a pour module : " $\rho*d\theta/ds$ ".

$$\text{Posons : } dp/ds = \cos(V) \text{ et } \rho*d\theta/ds = \sin(V)$$

Ces deux paramètres, qui interviennent dans les expressions de " $E\alpha$ " et de " $E\beta$ ", ne sont pas des constantes. Leur valeur varie lorsque l'on passe du point M au point T. Le parcours de M à T s'accompagne en effet d'une rotation " $d\theta$ " du rayon polaire. L'angle " V " varie lui aussi en fonction de θ . Entre M et T, la variation " dV " a pour valeur :

$$dV = -d\theta$$

Par dérivation de " dp/ds " et de " $\rho*d\theta/ds$ " par rapport à " ds ", on obtient :

$$d(dp/ds)/ds = -\sin(V)*(dV/ds) \text{ et } d(\rho*d\theta/ds)/ds = \cos(V)*(dV/ds) \quad \text{avec : } dV/ds = -d\theta/ds$$

Après ces calculs préliminaires, procédons à la dérivation de " $E\alpha$ ".

$$E\alpha = \cos(V)*E\rho + \sin(V)*E\theta$$

$$\delta E\alpha/\delta\alpha = \cos(V)*\delta E\rho/\delta\alpha - E\rho*\sin(V)*(dV/d\alpha) + \sin(V)*\delta E\theta/\delta\alpha + E\theta*\cos(V)*(dV/d\alpha)$$

Procédons de même à la dérivation de " $E\beta$ ".

$$E\beta = -\sin(V)*E\rho + \cos(V)*E\theta$$

$$\delta E\beta/\delta\alpha = -\sin(V)*\delta E\rho/\delta\alpha - E\rho*\cos(V)*(dV/d\alpha) + \cos(V)*\delta E\theta/\delta\alpha - E\theta*\sin(V)*(dV/d\alpha)$$

D'autre part, en tenant compte de l'égalité $d\alpha = ds$:

$$\delta E\rho/\delta\alpha = (\delta E\rho/\delta\rho)*(dp/ds) + (\delta E\rho/(\rho*\delta\theta))*(\rho*d\theta/ds)$$

$$\delta E\theta/\delta\alpha = (\delta E\theta/\delta\rho)*(dp/ds) + (\delta E\theta/(\rho*\delta\theta))*(\rho*d\theta/ds)$$

On obtient alors :

$$\delta E\alpha/\delta\alpha = (dp/ds)*\delta E\rho/\delta\alpha - E\rho*\sin(V)*(-d\theta/ds) + (\rho*d\theta/ds)*\delta E\theta/\delta\alpha + E\theta*\cos(V)*(-d\theta/ds)$$

$$\delta E\beta/\delta\alpha = (-\rho*d\theta/ds)*\delta E\rho/\delta\alpha - E\rho*\cos(V)*(-d\theta/ds) + (dp/ds)*\delta E\theta/\delta\alpha - E\theta*\sin(V)*(-d\theta/ds)$$

Soit, en définitive, après regroupement des termes en " $E\rho$ " et " $E\theta$ ", les formules suivantes, qui correspondent à celles de la page 5.4 :

$$\delta E\alpha/\delta\alpha = (dp/ds)*\delta E\rho/\delta\alpha + (\rho*d\theta/ds)*\delta E\theta/\delta\alpha - (\rho*d\theta/ds)*(E\beta/\rho)$$

$$\delta E\beta/\delta\alpha = (-\rho*d\theta/ds)*\delta E\rho/\delta\alpha + (dp/ds)*\delta E\theta/\delta\alpha + (\rho*d\theta/ds)*(E\alpha/\rho)$$

ou bien encore, en faisant intervenir le module " v " de la vitesse :

$$\delta E\rho/\delta\alpha = [(\delta E\rho/\delta\rho)*(dp/dt) + (\delta E\rho/(\rho*\delta\theta))*(\rho*d\theta/dt)] / v$$

$$\delta E\theta/\delta\alpha = [(\delta E\theta/\delta\rho)*(dp/dt) + (\delta E\theta/(\rho*\delta\theta))*(\rho*d\theta/dt)] / v$$

$$\delta E\alpha/\delta\alpha = [(dp/dt)*\delta E\rho/\delta\alpha + (\rho*d\theta/dt)*\delta E\theta/\delta\alpha - (\rho*d\theta/dt)*(E\beta/\rho)] / v$$

$$\delta E\beta/\delta\alpha = [(-\rho*d\theta/dt)*\delta E\rho/\delta\alpha + (dp/dt)*\delta E\theta/\delta\alpha + (\rho*d\theta/dt)*(E\alpha/\rho)] / v$$

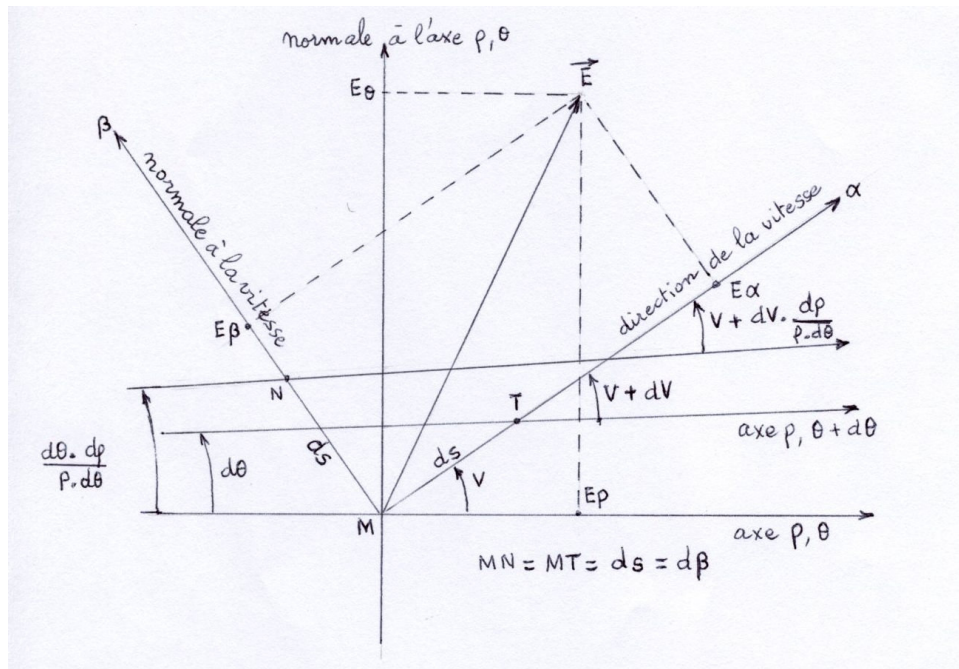
Comme indiqué plus haut, " $\delta E\alpha/\delta\alpha$ " et " $\delta E\beta/\delta\alpha$ " rentrent dans les expressions des coefficients de la matrice, page 5.2. **Les deux autres gradients, " $\delta E\alpha/\delta\beta$ " et " $\delta E\beta/\delta\beta$ ", se déduisent des précédents** par application du divergent et du rotationnel, comme indiqué page 5.4, sous réserve que le champ pris en compte réponde aux critères de Maxwell, ce qui est le cas ici, s'agissant d'un champ électrique.

D'après ce qui précède, le calcul direct des gradients " $\delta E \alpha / \delta \beta$ " et " $\delta E \beta / \delta \beta$ ", dans la direction de la normale, n'est donc pas nécessaire.

Néanmoins, nous allons faire ce calcul, et cela selon la même procédure que celle que nous venons d'utiliser pour le calcul de " $\delta E\alpha/\delta\alpha$ " et " $\delta E\beta/\delta\alpha$ ".

Le calcul de " $\delta\epsilon\alpha/\delta\beta$ " et " $\delta\epsilon\beta/\delta\beta$ " fait appel au vecteur MN, de module " $d\beta$ " porté en M *dans la direction de la normale*. Ce vecteur est choisi de la manière suivante :

vecteur $d\beta = ds * \text{vecteur unitaire de la normale}$
Autrement dit, le module " $d\beta$ " a pour longueur " ds "



Sur la figure, le rayon vecteur passant par le point N ainsi créé, est différent de celui qui passe par le point T. L'angle "V" de départ reste cependant exactement le même. Mais sa dérivée "dV/ds" a changé de valeur :

$$dV/ds = (-d\theta/ds) * (dp / (\rho * d\theta)) \quad \text{soit : } dV/ds = dV/d\beta = -\delta\rho / (\rho * ds)$$

Procédons à la dérivation de "Eα" dans le sens de la normale.

$$E\alpha = \cos(V)*E\rho + \sin(V)*E\theta$$

$$\delta E_{\alpha}/\delta\beta = \cos(V)*\delta E_{\rho}/\delta\beta - E_{\rho}*\sin(V)*(dV/d\beta) + \sin(V)*\delta E_{\theta}/\delta\beta + E_{\theta}*\cos(V)*(dV/d\beta)$$

Procédons de même à la dérivation de "Eß".

$$E\beta = -\sin(V)*E\rho + \cos(V)*E\theta$$

$$\delta E_{\beta}/\delta\beta = -\sin(V)*\delta E_{\rho}/\delta\beta - E_{\rho}*\cos(V)*(dV/d\beta) + \cos(V)*\delta E_{\theta}/\delta\beta - E_{\theta}*\sin(V)*(dV/d\beta)$$

D'autre part, toujours dans la direction de la normale, les dérivées de " E_p " et " E_θ " sont :

$$\delta E_p / \delta \beta = (\delta E_p / \delta \rho) * (-\rho * d\theta / ds) + (\delta E_p / (\rho * \delta \theta)) * (d\rho / ds)$$

$$\delta E\theta/\delta\beta = (\delta E\theta/\delta\rho)*(-\rho*d\theta/ds) + (\delta E\theta/(\rho*\delta\theta))*(d\rho/ds)$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}\delta E_\alpha / \delta \beta &= (dp/ds) * \delta E_\rho / \delta \beta - E_\rho * \sin(V) * (-dp/(p*ds)) + (p*d\theta/ds) * \delta E_\theta / \delta \beta + E_\theta * \cos(V) * (-dp/(p*ds)) \\ \delta E_\beta / \delta \beta &= (-p*d\theta/ds) * \delta E_\rho / \delta \beta - E_\rho * \cos(V) * (-dp/(p*ds)) + (dp/ds) * \delta E_\theta / \delta \beta - E_\theta * \sin(V) * (-dp/(p*ds))\end{aligned}$$

Soit, en définitive, après regroupement des termes en "E ρ " et "E θ ", les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\delta E_\alpha / \delta \beta &= (dp/ds) * \delta E_\rho / \delta \beta + (p*d\theta/ds) * \delta E_\theta / \delta \beta - (dp/(p*ds)) * (E_\beta / \rho) \\ \delta E_\beta / \delta \beta &= (-p*d\theta/ds) * \delta E_\rho / \delta \beta + (dp/ds) * \delta E_\theta / \delta \beta + (\delta \rho / (p*ds)) * (E_\alpha / \rho)\end{aligned}$$

ou bien encore en faisant intervenir le module "v" de la vitesse :

$$\begin{aligned}\delta E_\rho / \delta \beta &= [(\delta E_\rho / \delta \rho) * (-p*d\theta/dt) + (\delta E_\rho / (p*\delta \theta)) * (dp/dt)] / v \\ \delta E_\theta / \delta \beta &= [(\delta E_\theta / \delta \rho) * (-p*d\theta/dt) + (\delta E_\theta / (p*\delta \theta)) * (dp/dt)] / v \\ \delta E_\alpha / \delta \beta &= [(dp/dt) * \delta E_\rho / \delta \beta + (p*d\theta/dt) * \delta E_\theta / \delta \beta - (dp/dt) * (E_\beta / \rho)] / v \\ \delta E_\beta / \delta \beta &= [(-p*d\theta/dt) * \delta E_\rho / \delta \beta + (dp/dt) * \delta E_\theta / \delta \beta + (\delta \rho / dt) * (E_\alpha / \rho)] / v\end{aligned}$$

Vérifications.

Dans le calcul des quatre gradients " $\delta E_\alpha / \delta \alpha$ ", " $\delta E_\beta / \delta \alpha$ ", " $\delta E_\alpha / \delta \beta$ ", " $\delta E_\beta / \delta \beta$ ", aucune hypothèse n'est faite sur la nature du champ "E". Rappelons d'autre part que l'espace $M\alpha\beta$ est cartésien.

Concernant le **divergent**, nous trouvons :

$$\delta E_\alpha / \delta \alpha + \delta E_\beta / \delta \beta = E_\rho / \rho + \delta E_\rho / \delta \rho + \delta E_\theta / (p*\delta \theta)$$

Concernant la composante en "z" du **rotationnel**, nous trouvons :

$$\delta E_\beta / \delta \alpha - \delta E_\alpha / \delta \beta = E_\theta / \rho + \delta E_\theta / \delta \rho - \delta E_\rho / (p*\delta \theta)$$

Faisons maintenant les hypothèses restrictives suivantes :

- Le champ est un champ électrique.
- Le champ magnétique est statique.

Le deuxième membre du divergent s'identifie alors au terme " $-dE_z/dz$ " du divergent selon Maxwell.

Et le deuxième membre du rotationnel devient identiquement nul conformément à Maxwell.

6. Formule de Liouville

6.1 Démonstration.

Les équations du mouvement relatif au 1^{er} ordre (cf chapitre 3)

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} = A_{11} \alpha + A_{12} \dot{\alpha} + A_{13} \beta + A_{14} \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} = A_{31} \alpha + A_{32} \dot{\alpha} + A_{33} \beta + A_{34} \dot{\beta} \end{cases}$$

sont des équations différentielles linéaires et homogènes admettant à l'instant t quatre couples de solutions linéairement indépendantes soit : α_1, β_1 α_2, β_2 α_3, β_3 α_4, β_4

Considérons le tableau suivant formé de ces solutions et de leurs dérivées :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 & \dot{\alpha}_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_4 \end{vmatrix}$$

Soit W_r le déterminant de ce tableau. Nous pouvons le développer de la manière suivante :

$$\begin{aligned} W_r = & (\alpha_1 \dot{\alpha}_2 - \alpha_2 \dot{\alpha}_1) \cdot (\beta_3 \dot{\beta}_4 - \beta_4 \dot{\beta}_3) \\ & - (\alpha_1 \dot{\alpha}_3 - \alpha_3 \dot{\alpha}_1) \cdot (\beta_2 \dot{\beta}_4 - \beta_4 \dot{\beta}_2) \\ & + (\alpha_1 \dot{\alpha}_4 - \alpha_4 \dot{\alpha}_1) \cdot (\beta_2 \dot{\beta}_3 - \beta_3 \dot{\beta}_2) \\ & + (\alpha_2 \dot{\alpha}_3 - \alpha_3 \dot{\alpha}_2) \cdot (\beta_1 \dot{\beta}_4 - \beta_4 \dot{\beta}_1) \\ & - (\alpha_2 \dot{\alpha}_4 - \alpha_4 \dot{\alpha}_2) \cdot (\beta_1 \dot{\beta}_3 - \beta_3 \dot{\beta}_1) \\ & + (\alpha_3 \dot{\alpha}_4 - \alpha_4 \dot{\alpha}_3) \cdot (\beta_1 \dot{\beta}_2 - \beta_2 \dot{\beta}_1) \end{aligned}$$

Calculons la dérivée de W_r en remarquant qu'une expression de la forme $a\dot{b} - \dot{a}b$ a pour dérivée $a\ddot{b} - \ddot{a}b$:

$$\begin{aligned} \frac{dW_r}{dt} = & (\alpha_1 \ddot{\alpha}_2 - \ddot{\alpha}_2 \alpha_1) \cdot (\beta_3 \dot{\beta}_4 - \beta_4 \dot{\beta}_3) + (\alpha_1 \dot{\alpha}_2 - \alpha_2 \dot{\alpha}_1) \cdot (\beta_3 \ddot{\beta}_4 - \ddot{\beta}_4 \beta_3) \\ & - (\alpha_1 \ddot{\alpha}_3 - \ddot{\alpha}_3 \alpha_1) \cdot (\beta_2 \dot{\beta}_4 - \beta_4 \dot{\beta}_2) - (\alpha_1 \dot{\alpha}_3 - \alpha_3 \dot{\alpha}_1) \cdot (\beta_2 \ddot{\beta}_4 - \ddot{\beta}_4 \beta_2) \\ & + \dots \end{aligned}$$

Nous constatons que $\frac{dW_r}{dt}$ est la somme des déterminants des deux tableaux suivants :

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \ddot{\alpha}_1 & \ddot{\alpha}_2 & \ddot{\alpha}_3 & \ddot{\alpha}_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \dot{\beta}_1 & \dot{\beta}_2 & \dot{\beta}_3 & \dot{\beta}_4 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \dot{\alpha}_1 & \dot{\alpha}_2 & \dot{\alpha}_3 & \dot{\alpha}_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \ddot{\beta}_1 & \ddot{\beta}_2 & \ddot{\beta}_3 & \ddot{\beta}_4 \end{vmatrix}$$

D'autre part, par hypothèse, les solutions $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2$ etc.. vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{cases} \ddot{\alpha}_1 = A_{11} \cdot \alpha_1 + A_{12} \cdot \dot{\alpha}_1 + A_{13} \cdot \beta_1 + A_{14} \cdot \dot{\beta}_1 \\ \ddot{\alpha}_2 = A_{11} \cdot \alpha_2 + A_{12} \cdot \dot{\alpha}_2 + A_{13} \cdot \beta_2 + A_{14} \cdot \dot{\beta}_2 \\ \ddot{\alpha}_3 = A_{11} \cdot \alpha_3 + A_{12} \cdot \dot{\alpha}_3 + A_{13} \cdot \beta_3 + A_{14} \cdot \dot{\beta}_3 \\ \ddot{\alpha}_4 = A_{11} \cdot \alpha_4 + A_{12} \cdot \dot{\alpha}_4 + A_{13} \cdot \beta_4 + A_{14} \cdot \dot{\beta}_4 \\ \ddot{\beta}_1 = A_{31} \cdot \alpha_1 + A_{32} \cdot \dot{\alpha}_1 + A_{33} \cdot \beta_1 + A_{34} \cdot \dot{\beta}_1 \\ \ddot{\beta}_2 = A_{31} \cdot \alpha_2 + A_{32} \cdot \dot{\alpha}_2 + A_{33} \cdot \beta_2 + A_{34} \cdot \dot{\beta}_2 \\ \ddot{\beta}_3 = A_{31} \cdot \alpha_3 + A_{32} \cdot \dot{\alpha}_3 + A_{33} \cdot \beta_3 + A_{34} \cdot \dot{\beta}_3 \\ \ddot{\beta}_4 = A_{31} \cdot \alpha_4 + A_{32} \cdot \dot{\alpha}_4 + A_{33} \cdot \beta_4 + A_{34} \cdot \dot{\beta}_4 \end{cases}$$

De ces égalités nous tirons :

$$A_{12} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \ddot{\alpha}_1 & \beta_1 & \dot{\beta}_1 \\ \alpha_2 & \ddot{\alpha}_2 & \beta_2 & \dot{\beta}_2 \\ \alpha_3 & \ddot{\alpha}_3 & \beta_3 & \dot{\beta}_3 \\ \alpha_4 & \ddot{\alpha}_4 & \beta_4 & \dot{\beta}_4 \end{vmatrix}}{W_r} \quad A_{34} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & \dot{\alpha}_1 & \beta_1 & \ddot{\beta}_1 \\ \alpha_2 & \dot{\alpha}_2 & \beta_2 & \ddot{\beta}_2 \\ \alpha_3 & \dot{\alpha}_3 & \beta_3 & \ddot{\beta}_3 \\ \alpha_4 & \dot{\alpha}_4 & \beta_4 & \ddot{\beta}_4 \end{vmatrix}}{W_r}$$

En définitive $\frac{dW_r}{dt} = W_r \cdot (A_{12} + A_{34})$

Soit, en intégrant :

$$W_r = W_{r_0} \cdot e^{\int_{t_0}^t (A_{12} + A_{34}) dt}$$

Nous retrouvons ainsi la formule de Liouville.

6.2 Application à la matrice en temps.

Les valeurs des coefficients A_{12} et A_{34} calculés au chapitre 5, page 5.2 sont les suivantes :

$$A_{12} = + 3 \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{E\alpha}{v} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

$$A_{34} = + \frac{q}{m} \cdot \frac{E\alpha}{v} \cdot \left(\frac{1}{\gamma^2} - 1 \right)$$

Ce qui donne :

$$A_{12} + A_{34} = -4 \cdot \frac{q}{m} \cdot \frac{E_x \cdot v}{c^2}$$

Nous pouvons remarquer que l'expression $q \cdot E_x \cdot v$ est, par définition, égale au travail par unité de temps des forces extérieures. En effet, E_x est le module de la composante selon le vecteur vitesse de module v , du champ électrique agissant sur la particule de charge q .

Nous pouvons donc écrire :

$$q \cdot E_x \cdot v = \frac{d}{dt}(mc^2)$$

où mc^2 représente l'énergie totale de la particule.

Nous avons donc :

$$A_{12} + A_{34} = -4 \cdot \frac{1}{m} \frac{dm}{dt}$$

$$\text{et : } dW_r = W_r \cdot -4 \frac{dm}{m}$$

En intégrant nous trouvons la formule de Liouville relative à notre problème :

$$W_r(t) = W_0 \left(\frac{m_{t_0}}{m} \right)^4 \quad \text{avec : } m_{t_0} = \text{masse à l'instant } t_0$$

$$m = \text{masse à l'instant } t$$

$$\text{ou encore} \quad W_r(t) = W_0 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_t} \right)^4 \quad \text{avec } \gamma_0 = \text{valeur de } \gamma \text{ à l'instant } t_0$$

$$\gamma = \text{valeur de } \gamma \text{ à l'instant } t$$

Le déterminant de la matrice en temps varie donc comme l'inverse de γ^4 .

6.3. Cas des autres formes de matrices

6.3.1. Soit W_0 le déterminant de la matrice en temps à l'instant t_0 .

Considérons maintenant la matrice :

$$x \quad x' = \frac{dx}{ds} \quad \Delta \varphi \quad \frac{\Delta w}{w} \quad (\text{c.f. chapitre 4})$$

Nous avons vu que cette matrice est reliée à la matrice en temps par les relations suivantes :

$$x = \beta \quad x' = \frac{\dot{\beta}}{v} \quad \Delta \varphi = \Omega \cdot \frac{\alpha}{v} \quad \frac{\Delta w}{w} = (\dot{\alpha} - \omega \beta) \cdot \frac{\gamma^3 v}{(\gamma - 1)c^2}$$

Nous en déduisons la formule de Liouville :

$$W_S(t) = W_0 \cdot \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_t} \right)^4 \cdot \frac{v_0}{v_t} \cdot \frac{v_0}{v_t} \cdot \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_0} \right)^3 \cdot \frac{v_t}{v_0} \cdot \frac{\gamma_0 - 1}{\gamma_t - 1}$$

soit :

$$W_S(t) = W_0 \cdot \frac{v_0 \cdot \gamma_0 \cdot (\gamma_0 - 1)}{v_t \cdot \gamma_t \cdot (\gamma_t - 1)}$$

6.3.2. Pour la matrice :

$$x \quad p_x = m \frac{dx}{dt} \quad \Delta\varphi \quad \Delta W$$

les relations avec la matrice en temps sont :

$$x = \beta \quad p_x = m_0 \cdot \gamma \cdot \dot{\beta} \quad \Delta\varphi = \Omega \cdot \frac{\alpha}{v} \quad \Delta W = (\dot{\alpha} - \omega\beta) \cdot m_0 \cdot \gamma^3 \cdot v$$

m_0 désigne ici la masse au repos

Nous en déduisons :

$$W_t(t) = W_0 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_t} \right)^4 \cdot \frac{\gamma_t}{\gamma_0} \cdot \frac{v_0}{v_t} \cdot \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_0} \right)^3 \cdot \frac{v_t}{v_0} \quad \text{soit :} \quad W_t(t) = W_0$$

Le déterminant de cette matrice est constant, résultat connu.

6.3.3 Pour la matrice :

$$x \quad x' = \frac{dx}{ds} \quad \Delta l \quad \frac{\Delta h}{h}$$

les relations sont les suivantes :

$$x = \beta \quad x' = \frac{\dot{\beta}}{v} \quad \Delta l = \alpha \quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{\gamma}{\gamma+1} \cdot \frac{\Delta W}{W} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta h}{h} = \frac{\gamma^4 v}{(\gamma^2-1)c^2} (\dot{\alpha} - \omega\beta)$$

Le déterminant à l'instant t est pour cette matrice :

$$W_u(t) = W_0 \left(\frac{\gamma_0}{\gamma_t} \right)^4 \cdot \frac{v_0}{v_t} \cdot \left(\frac{\gamma_t}{\gamma_0} \right)^4 \cdot \frac{v_t}{v_0} \cdot \frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_t^2-1} \quad \text{soit :} \quad W_u(t) = W_0 \frac{\gamma_0^2-1}{\gamma_t^2-1}$$

6.3.4. Nous noterons que dans l'application des transformations linéaires précédentes nous avons négligé le terme $\omega\beta$ des expressions $\dot{\alpha} - \omega\beta$. C'est possible car une combinaison linéaire des termes matriciels ne change pas la valeur du déterminant de la matrice, dans le cas général.

7. Système d'unités

7.1. Généralités.

Les calculs numériques des programmes de la série TRAJ sont basés sur un système cohérent d'unités, inspiré du système MKSA et adapté aux grandeurs caractéristiques des particules chargées.

7.2. Définition du système d'unités.

7.2.1. Unités fondamentales :

longueur : mètre

temps : 10^{-9} seconde (nanoseconde)

charge électrique : charge élémentaire, soit $\approx 1.602 \cdot 10^{-19}$ Coulomb

induction : tesla

angle : radian

7.2.2. Unités dérivées, utilisés dans les programmes :

rigidité : tesla \times mètre

tension : 10^9 volt (Gigavolt)

Champ électrique : 10^9 volt par mètre

énergie : 10^9 electron-volt (GeV)

vitesse : 10^9 mètre par seconde (mètre par nanoseconde)

accélération : 10^{18} mètre par seconde par seconde

vitesse angulaire : 10^9 radian par seconde (radian par nanoseconde)

fréquence : 10^9 hertz par seconde (Gigahertz)

Quantité de mouvement : $\approx 1.602 \cdot 10^{-19}$ kilogramme \times mètre par seconde
etc...

7.2.3. Autres unités, pour information :

intensité : $\approx 1.602 \cdot 10^{-10}$ ampère

force : $\approx 1.602 \cdot 10^{-10}$ newton

masse : $\approx 1.602 \cdot 10^{-28}$ kilogramme

travail : $\approx 1.602 \cdot 10^{-10}$ joule

puissance : $\approx 1.602 \cdot 10^{-1}$ watt

7.2.4. Quelques grandeurs courantes, dans ce système :

énergie correspondant à l'unité de masse atomique : . 931481

vitesse de la lumière : . 2998

masse correspondant à l'unité de masse atomique :

$$.931481 / (.2998)^2 \approx 10.36$$

7.3 Unités utilisées dans les entrées et sorties, à l'exception des tableaux matriciels.

Les entrées et sorties sont exprimées en général dans le système défini ci-dessus. Les dérogations sont les suivantes :

Pour le programme TRAJ22, la fréquence est exprimée en hertz.

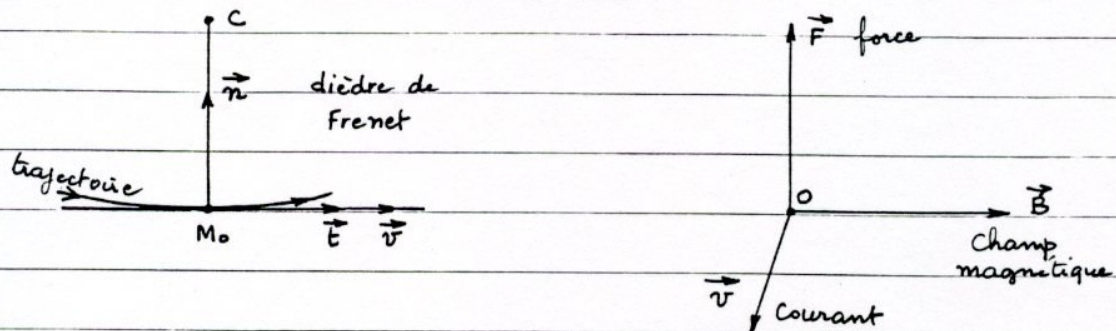
Pour l'ensemble des programmes, les angles sont exprimés en degré, les énergies en million d'électron-volt (MeV)

7.4. Unités utilisées dans les tableaux matriciels.

Ce sont les unités du système cohérent défini au paragraphe 7.2, avec, comme seule exception, la phase HF exprimée en degré et non pas en radian, pour plus de commodité d'emploi.

8. Commentaires

8.1 Règles de signe pour le champ magnétique



L'attention du lecteur est attirée sur une contradiction apparente entre les règles de signe du dièdre de FRENET et celles qui régissent le sens de la force magnétique agissant sur une particule en mouvement.

Les conventions de sens pour le champ magnétique, et de signe pour la charge électrique sont telles que le trièdre formé par les vecteurs vitesse, champ magnétique, force, soit un trièdre direct pour une particule chargée positivement.

Par ailleurs, de par la définition des axes de référence du dièdre de FRENET, la force magnétique au point M_0 est comptée positivement si le champ magnétique appliqué en M_0 est de sens négatif : c'est à dire perpendiculaire au plan de la figure, et dirigé dans le même sens que le regard de l'observateur.

Cette contradiction apparente tient au fait que les axes du dièdre de FRENET s'identifient aux axes \vec{v} et \vec{F} .

Il est évidemment tenu compte de cette constatation dans l'établissement des coefficients des équations de mouvement (page 5.2) : le signe du champ magnétique B est inversé. De même, s'il s'agit d'un champ magnétique seul (page 5.5), le vecteur rotation instantanée s'exprime par la formule :

$$\text{module } \omega = -\frac{q}{m} \cdot B$$

8.2. Effet de la discontinuité du champ magnétique.

Tout ce qui suit ne s'applique pas au cas théorique où le champ magnétique est connu sous la forme d'une fonction définie et continue tout le long de la trajectoire principale.

Nous sommes ici dans l'hypothèse où le champ magnétique n'est défini qu'en un nombre donné de points, comme c'est le cas général des "cartes de champ" mesurées, ou analytiques. Nous avons donc affaire à une fonction discontinue du champ magnétique.

Pour les besoins du calcul de la trajectoire principale, le champ magnétique au voisinage du point courant doit être représenté par une fonction définie et continue satisfaisant, au mieux, aux valeurs de champ des points de la carte de champ entourant le point courant.

Il existe une grande variété de choix de type de fonction. Pour les programmes de calcul qui nous concernent, un polynôme du second degré $B(p, \theta)$ a été jugé satisfaisant, les polynômes de degrés supérieurs n'apportant pas dans la pratique d'amélioration évidente.

Au cours de la progression du point courant, on est amené à changer les points de la carte de champ pris en compte pour l'élaboration de la fonction $B(p, \theta)$. Ce qui entraîne une petite discontinuité du champ magnétique pris en compte pour le calcul de la trajectoire.

Si l'on ne calcule qu'une seule trajectoire, cette discontinuité, inévitable, n'a pas de conséquence importante. Mais il faut veiller à rester conforme aux lois de la cinématique. Le franchissement de la discontinuité, qui se produit en pratique au début d'un pas de calcul, doit se faire dans le respect de la continuité du vecteur vitesse.

En effet, la particule ayant une masse, son énergie ne peut pas varier instantanément.

S'agissant d'un groupe de particules, la discontinuité doit suivre la même loi pour l'ensemble des particules. Autrement dit, la frontière entre deux zones de champ magnétique doit être indépendante du choix de la particule. C'est une frontière géographique, et comme on s'intéresse particulièrement au calcul au premier ordre, on peut décider que cette frontière, qui passe nécessairement par le point courant de la trajectoire principale en début de pas, est une droite. Nous choisirons la normale à la trajectoire principale pour fixer un choix.

Passons maintenant à l'examen du cas du mouvement d'un groupe de particules, infiniment nombreux, que représente la matrice de transfert au premier ordre définie dans les chapitres précédents.

La discontinuité du champ magnétique est observée, par convention, au début d'un pas de calcul de la trajectoire principale : on a posé comme hypothèse de ne pas changer de polynôme $B(p, \theta)$ pendant l'exécution du calcul d'un pas.

En ce qui concerne la trajectoire principale, comme nous l'avons dit précédemment, on assurera la continuité du vecteur vitesse pour respecter les lois de la cinématique et de la dynamique.

En ce qui concerne les trajectoires associées, définies par la matrice de transfert, on fera de même.

Au premier ordre, la discontinuité du champ magnétique entraîne une discontinuité de la vitesse de rotation instantanée ω .

Soit ω_a la valeur de ω à la fin du pas de

Calcul précédent, et ω (voisin de ω_a) la valeur de la rotation instantanée en début de pas. La différence $\omega_a - \omega$ est très petite, mais il faut en tenir compte.

En effet: considérons un point M de coordonnées relatives $\alpha_F, \dot{\alpha}_F, \beta_F, \dot{\beta}_F$ en fin de pas de calcul.

Soient $\alpha, \dot{\alpha}, \beta, \dot{\beta}$ les coordonnées de M au même instant, au début du pas de calcul suivant. Au premier ordre, la différence des modules vitesse entre M et M_0 est la suivante:

$$\Delta v_F = \dot{\alpha}_F - \omega_a \beta_F \quad \text{en fin de pas de calcul}$$

$$\Delta v = \dot{\alpha} - \omega \beta \quad \text{en début de pas de calcul}$$

Δv ne pouvant varier instantanément, $\Delta v_F - \Delta v = 0$

$$\text{d'où:} \quad \dot{\alpha} - \dot{\alpha}_F = \omega \beta - \omega_a \beta_F$$

On observera que la coordonnée de position β_F est identique à β . (continuité de la position)

$$\text{on a donc:} \quad \dot{\alpha} = \dot{\alpha}_F - (\omega_a - \omega) \beta_F$$

La vitesse relative en début de pas est égale à la vitesse relative en fin de pas de calcul du pas précédent, corrigée éventuellement de la différence des vitesses d'entraînement due à la discontinuité du champ magnétique.

les autres coordonnées ne sont pas affectées:

$$\alpha = \alpha_F \quad (\text{continuité de position})$$

$$\dot{\beta} = \dot{\beta}_F \quad (\text{la composante radiale de la vitesse relative n'est pas affectée au 1^{er} ordre par une variation de } \omega).$$

En définitive, la discontinuité du champ magnétique due à un choix différent des points de la carte de champ magnétique entourant la trajectoire principale introduit une petite discontinuité du vecteur rotation instantanée qu'il y a lieu de compenser pour respecter les lois

de la cinématique et de la dynamique. A ce propos, on notera que le calcul matriciel classique "hard edge" est soumis aux mêmes règles de continuité aux frontières que celles qui ont été indiquées ci-dessus: continuité des vecteurs position et vitesse absolue.